Zadanie 1

Niech $X_0, X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi i.i.d. o gęstości $g(x) = (x+1)^{-2}1_{[0,\infty)}(x)$. Dla $n = 1, 2, \ldots$ zdefiniujmy

$$Y_n = \frac{1}{n} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} (X_i - i).$$

Czy ciąg $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ zbiega według rozkładu? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

Rozwiązanie: Dystrybuanta F zmiennej X_0 wynosi

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{t}{t+1} & \text{dla } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Oznaczmy przez F_n dystrybuantę zmiennej Y_n. Z niezależności mamy

$$F_n(t) = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} (X_i - i) \leqslant t) = \mathbb{P}(\forall_{0 \leqslant i \leqslant n} X_i \leqslant nt+i) = \prod_{i=0}^{n} F(nt+i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \prod_{i=0}^{n} \frac{nt+i}{nt+i+1} = \frac{nt}{nt+n+1} & \text{dla } t > 0. \end{cases}$$

W powyższej równości skorzystaliśmy z tego, że dla $t < 0$, pierwszy czynnik w iloczynie znika, zaś dla $t \geqslant 0$ odpowiednie liczniki i mianowniki skracają się.

Zatem $F_n(t)$ zbiega do 0 dla $t < 0$ i do $\frac{t}{t+1}$ dla $t \geqslant 0$. Innymi słowy, dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, $F_n(t) \to F(t)$ dla $n \to \infty$. Zatem ciąg Y_n jest zbieżny według rozkładu do miary o dystrybuancie F, czyli do rozkładu zmiennej X_0.

1. Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi, X o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$, Y, Z o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Wykazać, że $X\sqrt{2Y}$ ma taki sam rozkład jak $Y - Z$.

Rozwiązanie.
Ponieważ funkcja charakterystyczna wyznacza rozkład, wystarczy wykazać, że $\varphi_{X\sqrt{2Y}} = \varphi_{Y-Z}$, gdzie φ_V oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej V. Ustalmy więc $t \in \mathbb{R}$ i wykażmy, że $\varphi_{X\sqrt{2Y}}(t) = \varphi_{Y-Z}(t)$. Przypomnijmy, że

$$\varphi_X(s) = e^{-s^2/2} \qquad \text{oraz} \qquad \varphi_Y(s) = \frac{1}{1-is}.$$

Ponieważ $e^{itX\sqrt{2Y}}$ jest co do modułu ograniczona (przez 1), to jest całkowalna, więc

$$\begin{aligned}\varphi_{X\sqrt{2Y}}(t) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(e^{itX\sqrt{2Y}}(t)|X\Big)\Big) = \mathbb{E}\varphi_X(t\sqrt{2Y}) = \mathbb{E}e^{-(t\sqrt{2Y})^2/2}\\ &= \mathbb{E}e^{-t^2Y} = \int_0^\infty e^{-(t^2+1)y}\,dy = \frac{1}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z tego, że $\frac{e^{-(t^2+1)y}}{1+t^2}$ jest funkcją pierwotną $e^{-(t^2+1)y}$. Ponieważ dla niezależnych zmiennych losowych U i V zachodzi $\varphi_{U+V} = \varphi_U\varphi_V$, to

$$\varphi_{Y-Z}(t) = \varphi_Y(t)\varphi_{-Z}(t) = \varphi_Y(t)\varphi_Y(-t) = \frac{1}{(1-it)(1+it)} = \frac{1}{1+t^2} = \varphi_{X\sqrt{2Y}}(t),$$

co chcieliśmy wykazać. $\square$

2. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Zdefiniujmy ciąg zmiennych losowych

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Niech ponadto dla $n \geqslant 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$.

(a) Wyznaczyć wszystkie liczby $b, c \in \mathbb{R}$, takie że ciąg $M_n = S_n^4 - 6nS_n^2 + bn^2 + cn$, $n \geqslant 0$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

(b) Dla danej liczby całkowitej dodatniej a, niech $\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon |S_n| = a\}$. Wyznaczyć średnią i wariancję τ.

Rozwiązanie.
(a) Ponieważ $|S_n| \leqslant |X_1| + \cdots + |X_n| = n$, to zmienne losowe S_n są ograniczone, więc są całkowalne. Ciąg $(S_n)_{n\geqslant 0}$ jest oczywiście adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Wystarczy więc wykazać, że dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$. Zauważmy, że $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$ dla $n \geqslant 1$ oraz $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$. Wobec tego X_{n+1} jest niezależny od $\mathcal{F}_n$, a S_n jest $\mathcal{F}_n$-mierzalny. Poza tym $\mathbb{E}X_{n+1}^2 = \mathbb{E}1 = 1 = \mathbb{E}1 = \mathbb{E}X_{n+1}^4$ oraz $\mathbb{E}X_{n+1} = 0 = \mathbb{E}X_{n+1}^3$ (bo X_{n+1} jest symetryczny i całkowalny, bo ograniczony). Wobec tego

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\Big((S_n + X_{n+1})^4 - 6(n+1)(S_n + X_{n+1})^2 + b(n+1)^2 + c(n+1)|\mathcal{F}_n\Big)\\ &= S_n^4 + 4S_n^3\mathbb{E}X_{n+1} + 6S_n^2\mathbb{E}X_{n+1}^2 + 4S_n\mathbb{E}X_{n+1}^3 + \mathbb{E}X_{n+1}^4\\ &\qquad - 6nS_n^2 - S_n^2 - 12(n+1)S_n\mathbb{E}X_{n+1} - 6(n+1)\mathbb{E}X_{n+1}^2\\ &\qquad\quad + bn^2 + b(2n+1) + cn + c\\ &= M_n - 5 + b + c + n(2b-6),\end{aligned}$$

więc aby było to równe M_n dla wszystkich $n \geqslant 0$, potrzeba i wystarcza, by zachodził układ równań $-5 + b + c = 0 = 2b - 6$, którego jedynym rozwiązaniem jest para $b = 3, c = 2$.

(b) Wiadomo z ćwiczeń/wykładu, że $Z_n = S_n^2 - n$ jest martyngałem (bo S_n to suma zmiennych iid o średniej 0 i wariancji 1). Poza tym dla każdego $N \in \mathbb{N}$ zmienna $\tau \wedge N$ jest ograniczonym momentem stopu. Wobec tego z twierdzenia Dooba wynika, że $0 = \mathbb{E}Z_{\tau\wedge N} = \mathbb{E}(S_{\tau\wedge N}^2 - \tau \wedge N)$, czyli $\mathbb{E}S_{\tau\wedge N}^2 = \mathbb{E}(\tau \wedge N)$.

Wiemy, że τ jest skończony prawie na pewno (dlaczego?). Zatem $\tau \wedge N$ zbiega do τ prawie na pewno, a zbieżność jest oczywiście monotoniczna. Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej zachodzi więc $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\tau \wedge N = \mathbb{E}\tau$.

Ponieważ zaś $\tau \wedge N$ zbiega do τ p.n., to $S_{\tau\wedge N}^2$ zbiega p.n. do S_τ^2 równej tożsamościowo a^2. Zmienne $S_{\tau\wedge N}^2$ są ograniczone przez a^2 (na mocy definicji τ), więc na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej zachodzi $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}S_{\tau\wedge N}^2 = \mathbb{E}S_\tau^2 = a^2$. Wykorzystując wyprowadzoną wcześniej tożsamość $\mathbb{E}S_{\tau\wedge N}^2 = \mathbb{E}(\tau \wedge N)$ i zbieżność prawej strony, otrzymujemy zatem $\mathbb{E}\tau = a^2$. W szczególności τ jest całowalne.

W podobny sposób, używając martngału M_n zamiast Z_n, wyprowadzimy równanie na $\mathbb{E}\tau$ i $\mathbb{E}\tau^2$: ponownie z twierdzenia Dooba mamy

$$0 = \mathbb{E}S_{\tau\wedge N}^4 - 6\mathbb{E}(\tau \wedge N)S_{\tau\wedge N}^2 + b\mathbb{E}(\tau \wedge N)^2 + c\mathbb{E}(\tau \wedge N). \tag{1}$$

Podobnie jak wcześniej, pierwszy, trzeci i czwarty składnik w (1) są zbieżne do, odpowiednio, $\mathbb{E}S_\tau^4 = a^4$, $b\mathbb{E}\tau^2$ i $c\mathbb{E}\tau$ na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności, odpowiednio, zmajoryzowanej i (dwa razy) monotonicznej. Do drugiego składnika również można użyć twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej; majorantą całkowalną w tym przypadku jest $\tau \cdot a^2$. Z (1) po wykonaniu wszystkich czterech przejść granicznych i uwzględnieniu faktu, że $|S_\tau| = a$ wynika równość

$$0 = a^4 - 6a^2\mathbb{E}\tau + b\mathbb{E}\tau^2 + c\mathbb{E}\tau.$$

Ponieważ zaś $b = 3, c = 2$ oraz $\mathbb{E}\tau = a^2$, dostajemy

$$\mathbb{E}\tau^2 = \frac{5a^4 - 2a^2}{3},$$

więc ostatecznie

$$\operatorname{Var}\tau = \mathbb{E}\tau^2 - (\mathbb{E}\tau)^2 = \frac{2}{3}a^2(a^2 - 1). \qquad \square$$

Rozwiązanie zadania $A3$

Przy założeniach zadania łatwo sprawdzić, że

$$EX_1 = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Var} X_1 = \frac{1}{4}, \quad E(X_1 - X_2) = 0, \quad \operatorname{Var}(X_1 - X_2) = \operatorname{Var} X_1 + \operatorname{Var} X_2 = \frac{1}{2}.$$

Ponadto, zmienne losowe $(X_{2k-1} - X_{2k}), k = 1, 2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład.

Wykorzystamy fakt, że jeżeli mamy dwa ciągi zmiennych losowych $(\zeta_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$, takie że η_n zbiega wg. rozkładu do η, a ζ_n zbiega prawie na pewno do pewnej stałej C (a więc też i wg. prawdopodobieństwa do C), wówczas $\zeta_n \eta_n$ zbiega wg. rozkładu do $C\eta$.

Zmienną losową Z_n możemy przepisać jako:

$$Z_n = \frac{1}{2} \xi_n \gamma_n \eta_n,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\xi_n &= \sqrt{\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\frac{1}{2} n}} \\
\gamma_n &= \frac{\sin(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_{2k-1} - X_{2k}))}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_{2k-1} - X_{2k})} \\
\eta_n &= \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_{2k-1} - X_{2k})}{\sqrt{\frac{1}{2} n}}.
\end{aligned}$$

Z mocnego prawa wielkich liczb oraz ciągłości funkcji $x \mapsto \sqrt{x}$ na $[0, \infty)$ otrzymujemy

$$\xi_n \to 1 \quad p.n. \qquad \text{oraz} \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_{2k-1} - X_{2k}) \to 0 \quad p.n.$$

Zatem, ze wskazówki

$$\gamma_n \to 1. \qquad p.n.$$

Z kolei, z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że η_n zbiega wg. rozkładu do rozkładu normalnego standardowego.

Otrzymaliśmy zatem, że Z_n zbiega wg. rozkładu do $\frac{1}{2}\eta$, gdzie η ma rozkład normalny standardowy (Zauważmy: $\frac{1}{2}\eta$ ma rozkład $N(0, \frac{1}{4})$).

Wiadomo, że zbieżność rozkładów jest równoważna zbieżności odpowiednich dystrybuant w punktach ciągłości dystrybuanty granicznej. W naszym przypadku wszędzie, bo rozkład normalny o dodatniej wariancji ma ciągłą dystrybuantę.

W konsekwencji, dla każdego t rzeczywistego

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n \le t) = P(\frac{1}{2}\eta \le t) = P(\eta \le 2t) = \Phi(2t),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego standardowego.

Zadanie 6

Czterej agenci, James, Hans, Ethan i George podróżują między Londynem, Berlinem, Nowym Jorkiem i Warszawą. W dniu „zero” każdy z nich jest w innym mieście. Każdego kolejnego dnia jeden z nich, wybrany losowo (z równymi prawdopodobieństwami), opuszcza miasto w którym przebywa i przemieszcza się do jednego z pozostałych miast, przy czym prawdopodobieństwo wyboru każdego z tych pozostałych miast jest wprost proporcjonalne do liczby znajdujących się w nim w tym momencie agentów.

a) Wykazać, że z prawdopodobieństwem jeden cała czwórka spotka się w jednym mieście.

b) Niech T oznacza oczekiwaną liczbę dni, które upłyną do spotkania. Obliczyć $\mathbb{E}T$.

Rozwiązanie:

Opiszmy sytuację z zadania łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, gdzie poszczególne stany interpretujemy jako:

1 – w każdym mieście jest po jednym agencie, 2 - w jednym mieście jest dwóch agentów, w dwóch innych miastach po jednym, 3 - w pewnych dwóch miastach jest po dwóch agentów, 4 - w jednym z miast jest trzech agentów, w pewnym innym jest jeden agent, 5 - wszyscy agenci są w tym samym mieście.

Ze stanu 1 z prawdopodobieństwem 1 przechodzimy do 2.

Będąc w stanie 2 pozostaniemy w nim jeśli wybrany agent to jeden z dwóch przebywających wspólnie czyli z prawdopodobieństwem 1/2. Prawdopodobieństwo przejścia do stanu 3 to $1/2 \cdot 1/3 = 1/6$ – wybrany zostaje jeden z dwóch "pojedynczych"agentów (prawd. 1/2) i przemieszcza się do drugiego pojedynczego (prawd. 1/3). Do stanu 4 przechodzimy z prawdopodobieństwem $1/2 \cdot 2/3 = 1/3$.

Ze stanu 3 z prawdopodobieństwem 1 przechodzimy do stanu 4. Z kolei ze stanu 4 z prawdopodobieństwem 1/4 przechodzimy do 5, a z prawdopodobieństwem 3/4 do 3.

Zatem macierz przejścia łańcucha to

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

a) oznaczmy przez p_i prawdopodobieństwo dojścia do stanu 5 ze stanu i. Zachodzą równośći

$$\begin{aligned} p_5 &= 1 \\ p_1 &= p_2 \\ p_2 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{3}p_4 \\ p_3 &= p_4 \\ p_4 &= \frac{3}{4}p_3 + \frac{1}{4}p_5. \end{aligned}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, 5$. W szczególności $p_1 = 1$.

Uwaga Punkt a) można też rozwiązać uzasadniając, że stany $1, \ldots, 4$ są nieistotne, więc są też chwilowe. Zatem każdy z tych stanów jest z prawdopodobieństwem 1 odwiedzany tylko skończenie wiele razy.

b) Oznaczając przez m_i średnią liczbę kroków potrzebną do przejścia ze stanu i do stanu 5, mamy

$$
\begin{aligned}
m_5 &= 0 \\
m_1 &= 1 + m_2 \\
m_2 &= 1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{6}m_3 + \frac{1}{3}m_4 \\
m_3 &= 1 + m_4 \\
m_4 &= 1 + \frac{3}{4}m_3 + \frac{1}{4}m_5.
\end{aligned}
$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $m_4 = 7$, $m_3 = 8$, $m_2 = 28/3$, $m_1 = 31/3$. Szukana wartość oczekiwana $\mathbb{E}T = 31/3$.

Zadanie 6

W urnie są dwie kule: biała i czerwona. Powtarzamy wielokrotnie następujący eksperyment. Losujemy jedną kulę z urny; jeżeli wylosowana kula jest biała, to z prawdopodobieństwem $1/3$ zastępujemy ją w urnie kulą czerwoną, a z prawdopodobieństwem $2/3$ odkładamy z powrotem do urny; jeżeli wylosowana kula jest czerwona, to z prawdopodobieństwem $1/2$ zastępujemy ją w urnie kulą białą, zaś z prawdopodobieństwem $1/2$ odkładamy do urny. Niech X_n oznacza liczbę kul białych w urnie po n-tym powtórzeniu eksperymentu. Czy ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega według rozkładu? Jeżeli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

Rozwiązanie Ciąg (X_n) jest łańcuchem Markowa o wartościach w przestrzeni stanów $S = \{0, 1, 2\}$ oraz prawdopodobieństwach przejścia

$$p_{0,0} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad p_{0,1} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$p_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad p_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \quad p_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$p_{2,1} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad p_{2,2} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Pozostałe prawdopodobieństwa przejścia wynoszą 0.

Zatem macierz przejścia łańcucha to (przyjmujemy kolejność stanów $0, 1, 2$)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Zachęcam do narysowania grafu przejścia dla tego łańcucha. Łańcuch jest nieprzywiedlny (dowolne dwa stany komunikują się) i nieokresowy (z 1 można przejść do 1 w jednym kroku), zatem spełnione są założenia twierdzenia ergodycznego. Z twierdzenia tego otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i$$

gdzie $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ to rozkład stacjonarny łańcucha, wyznaczony układem równań

$$\pi P = \pi$$
$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2.$$

Otrzymujemy zatem

$$\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{6}\pi_1$$
$$\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2$$
$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2.$$

Z pierwszych dwóch równań $\pi_0 = \pi_1/3$, $\pi_2 = 3\pi_1/4$. Po podstawieniu do trzeciego równania otrzymujemy $25\pi_1/12 = 1$, czyli

$$\pi_0 = \frac{4}{25}, \ \pi_1 = \frac{12}{25}, \ \pi_2 = \frac{9}{25}.$$

Zatem ciąg (X_n) zbiega według rozkładu do miary $\frac{4}{25}\delta_0 + \frac{12}{25}\delta_1 + \frac{9}{25}\delta_2$.